

3. Сложение и вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями

Вы знаете правила сложения и вычитания обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями. Их можно выразить такими равенствами:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

По таким же правилам складывают и вычитают рациональные дроби с одинаковыми знаменателями.

Чтобы сложить рациональные дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить тот же.

Чтобы вычесть рациональные дроби с одинаковыми знаменателями, нужно из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби, а знаменатель оставить тот же.

ПРИМЕР 1 Выполните вычитание:

$$1) \frac{7x-5}{8x^2} - \frac{3x-5}{8x^2}; \quad 2) \frac{y^2+2y}{y^2-25} - \frac{12y-25}{y^2-25}; \quad 3) \frac{4}{2a-1} - \frac{2a-3}{1-2a}.$$

Решение.

$$1) \frac{7x-5}{8x^2} - \frac{3x-5}{8x^2} = \frac{7x-5-(3x-5)}{8x^2} = \frac{7x-5-3x+5}{8x^2} = \frac{4x}{8x^2} = \frac{1}{2x}.$$

$$2) \frac{y^2+2y}{y^2-25} - \frac{12y-25}{y^2-25} = \frac{y^2+2y-(12y-25)}{y^2-25} = \frac{y^2+2y-12y+25}{y^2-25} = \\ = \frac{y^2-10y+25}{y^2-25} = \frac{(y-5)^2}{(y+5)(y-5)} = \frac{y-5}{y+5}.$$

$$3) \frac{4}{2a-1} - \frac{2a-3}{1-2a} = \frac{4}{2a-1} - \frac{2a-3}{-(2a-1)} = \frac{4}{2a-1} + \frac{2a-3}{2a-1} = \frac{4+2a-3}{2a-1} = \frac{2a+1}{2a-1}. \quad \blacktriangle$$

ПРИМЕР 2 Известно, что $\frac{m}{n} = -3$. Найдите значение выражения

$$\frac{2m+n}{m}.$$

Решение. Представим данную дробь в виде суммы целого и дробного выражений:

$$\frac{2m+n}{m} = \frac{2m}{m} + \frac{n}{m} = 2 + \frac{n}{m}.$$

Если $\frac{m}{n} = -3$, то $\frac{n}{m} = -\frac{1}{3}$. Следовательно,

$$\frac{2m+n}{m} = 2 + \frac{n}{m} = 2 - \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}. \quad \blacktriangle$$

ПРИМЕР 3 Найдите все натуральные значения n , при которых значение выражения $\frac{2n^2 + 3n - 15}{n}$ является целым числом.

Решение. Представим данную дробь в виде разности целого и дробного выражений:

$$\frac{2n^2 + 3n - 15}{n} = \frac{2n^2}{n} + \frac{3n}{n} - \frac{15}{n} = 2n + 3 - \frac{15}{n}.$$

Выражение $2n + 3$ принимает натуральные значения при любом натуральном n . Поэтому выражение $2n + 3 - \frac{15}{n}$ принимает целые значения, если значения выражения $\frac{15}{n}$ являются целыми числами. Это возможно только при следующих натуральных значениях n : 1, 3, 5, 15.

Ответ: $n = 1$, или $n = 3$, или $n = 5$, или $n = 15$. ▲